

RÉVISIONS D'ALGÈBRE

Corrigé

Ce corrigé commence à l'exercice 14.

Un corrigé ne propose jamais qu'une façon parmi d'autres de résoudre un exercice. Avant de lire un corrigé, vous devez avoir cherché par vous-même. Le corrigé ne vous donnera pas de renseignement sur vos éventuelles erreurs, lesquelles nécessiteront souvent l'intervention d'un professeur.

Le texte situé à droite des lignes verticales pointillées est un commentaire. Il ne fait donc pas partie de ce qui est exigible en matière de rédaction.

DÉVELOPPEMENT

14

Calculer.

$$\begin{aligned} \text{a) } (2 - 3x) - 2 &= +(+2 - 3x) - 2 \\ &= +2 - 3x - 2 \\ &= \boxed{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 4 - x - 4 &= +4 - x - 4 \\ &= \boxed{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } (4 - x) - 4 &= +(+4 - x) - 4 \\ &= +4 - x - 4 \\ &= \boxed{-x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 4 - (x - 4) &= +4 - (+x - 4) \\ &= +4 - x + 4 \\ &= \boxed{-x + 8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } 2(3a \times 4b) &= 2 \times 3a \times 4b \\ &= \boxed{14ab} \end{aligned}$$

15

$$b = 2a - 5$$

$$c = 3a - b - 5$$

$$\text{donc } c = 3a - (2a - 5) - 5$$

$$c = +3a - (+2a - 5) - 5$$

$$c = +3a - 2a + 5 - 5$$

$$c = +1a$$

$$c = \boxed{a}$$

16

$$\begin{aligned} 3n - (n - 1) &= +3n - (+n - 1) \\ &= +3n - n + 1 \\ &= \boxed{+2n + 1} \end{aligned}$$

(On obtient le successeur du double de l'entier n .)

17

a) Calculez directement les produits de monômes.

$$\begin{aligned} \text{b) } -(-3a^2 + 5a - 4) \\ &= (-1)(-3a^2 + 5a - 4) \\ &= \boxed{+3a^2 - 5a + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } -2(3a - 1) \\ &= (-2)(+3a - 1) \\ &= \boxed{-6a + 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } 5 - 2(3a - 1) \\ &= +5 - 2(3a - 1) \\ &= +5 - 6a + 2 \\ &= \boxed{-6a + 7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e) } (-5) - (3a - 1) \\ &= -5 - 1(+3a - 1) \\ &= -5 - 3a + 1 \\ &= \boxed{-3a - 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f) } (+3a - 2)(-2a + 5) \\ &= -6a^2 + 15a + 4a - 10 \\ &= \boxed{-6a^2 + 19a - 10} \end{aligned}$$

$$\text{g) } +1 - 3a(+1 - 3a) + 3a$$

Les « + » et les « - » ne doivent plus être vus comme des signes opératoires. Ce sont des moins-opposés et des plus-neutres. Je les appelle des « signes algébriques ». Il faut les imaginer précédés d'une espace additive.

$$\begin{aligned} &= +1 - 3a + 9a^2 + 3a \\ &= \boxed{+9a^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & -13a + 12 - 3(+2 - 3a) + (+3a - 5) - (+1 - a) \\ & = -13a + 12 - 6 + 9a + 3a - 5 - 1 + a \\ & = \boxed{0} \end{aligned}$$

18

$$\text{a)} \quad a(b+c) = \boxed{ab+ac}$$

$$\text{b)} \quad a(b \times c) = a \times (b \times c) = a \times b \times c = \boxed{abc}$$

■ L'associativité de la multiplication permet d'enlever les parenthèses.

$$\text{c)} \quad a+(b \times c) = \boxed{a+bc}$$

$$\text{d)} \quad -(a+b) = -(+a + b) = \boxed{-a - b}$$

$$\text{e)} \quad -(a \times b) = (-1) \times (a \times b) = (-1) \times a \times b = \boxed{-ab}$$

$$\text{f)} \quad a-(b-c) = +a -(+b -c) = \boxed{+a -b +c}$$

$$\text{g)} \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb$$

$$= a^2 + 1ab + 1ab + b^2 = \boxed{a^2 + 2ab + b^2}$$

■ On pouvait éviter ces calculs en appliquant une identité remarquable, mais il est bon de savoir la redémontrer.

$$\text{h)} \quad (a \times b)^2 = (ab)^2 = ab \times ab = abab = aabb = \boxed{a^2b^2}$$

$$\text{i)} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aaa}{bbb} = \boxed{\frac{a^3}{b^3}}$$

19

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & (+a - b + c)^2 \\ & = (+a - b + c)(+a - b + c) \end{aligned}$$

■ Si l'on ne connaît pas d'identité remarquable pouvant s'appliquer, on peut toujours revenir à la définition de la puissance. Le carré de *bidule*, c'est *bidule* $\times$ *bidule*.

$$= +a^2 - ab + ac - ab + b^2 - bc + ac - bc + c^2$$

$$= \boxed{a^2 + b^2 + c^2 - 2ab + 2ac - 2bc}$$

■ Pour calculer un « poly-produit » (c'est ainsi que nous avons choisi d'appeler un produit de plusieurs facteurs), il faut grouper des termes par deux. Ici, les calculs sont facilités si l'on groupe le premier facteur avec le dernier.

$$\begin{aligned} & (x-1)(x-2)(x+1) \\ & = [(x-1)(x+1)](x-2) \\ & = (x^2 - 1)(x-2) \end{aligned}$$

■ On a pu sauter une étape en appliquant une identité remarquable... (Si vous ne les avez pas étudiées en troisième, pas de panique, nous allons y venir.)

$$= \boxed{x^3 - 2x^2 - x + 2}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & (a-b)^3 \\ & = (a-b)(a-b)(a-b) \\ & = [(a-b)(a-b)](a-b) \\ & = (a^2 - 2ab + b^2)(a-b) \\ & = (a^2 - 2ab + b^2)(+a - b) \\ & = +a^3 - 2a^2b + ab^2 - a^2b + 2ab^2 - b^3 \\ & = \boxed{+a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & (a-b)^4 \\ & = (a-b)^2 (a-b)^2 \\ & = (a^2 - 2ab + b^2)(a^2 - 2ab + b^2) \\ & = a^4 - 2a^3b + 2a^2b^2 - 2a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 \\ & \quad + a^2b^2 - 2ab^3 + b^4 \\ & = \boxed{a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3) \\ & = a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3b - a^2b^2 - ab^3 - b^4 \\ & = \boxed{a^4 - b^4} \end{aligned}$$

20

■ Dans les questions a) b) et c), l'idée est de voir l'expression comme un « poly-produit ».

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -2(2x-1)(3x+2) \\ & = (-2)(2x-1)(3x+2) \\ & = (-2)[(+2x - 1)(+3x + 2)] \\ & = (-2)(+6x^2 + 4x - 3x - 2) \\ & = (-2)(+6x^2 + 1x - 2) \\ & = \boxed{-12x^2 - 2x + 4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & -2(x-1)^2 \\ & = (-2)(x-1)(x-1) \end{aligned}$$

$$= (-2)[(+x-1)(+x-1)]$$

$$= (-2)(+x^2 - x - x + 1)$$

On serait allé plus vite en utilisant une *identité remarquable*...

$$= (-2)(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \boxed{-2x^2 + 4x - 2}$$

c) $-(1-x)(1+x)$

$$= (-1)(1-x)(1+x)$$

$$= (-1)[(+1-x)(+1+x)]$$

$$= (-1)(+1+x-x-x^2)$$

■ On serait allé plus vite en utilisant une *identité remarquable*...

$$= (-1)(+1-x^2)$$

$$= -1 + x^2$$

$$= \boxed{+x^2 - 1}$$

d) $1-(1-x)(1+x)$

$$= +1 + (-1)(1-x)(1+x)$$

$$= +1 + (-1)[(1-x)(1+x)]$$

$$= \dots$$

$$= +1 + (-1)[+1-x^2]$$

$$= +1 - 1 + x^2$$

$$= \boxed{+x^2}$$

21

a) $+1 + (+1-x) - [(+1-x)(+1+x)]$

$$= +1 + 1 - x - (+1 + x - x - x^2)$$

$$= +2 - x - (+1 - x^2)$$

$$= +2 - x - 1 + x^2$$

$$= \boxed{x^2 - x + 1}$$

b) $-[(x-1)^2] - 2(2x-1)(3x+2)$

■ Il est plus prudent d'expliciter les crochets qui traduisent les conventions sur les puissances. Rappelons en effet que $-A^2$ signifie $-(A^2)$. Voir cours, les puissances, priorité.

$$= -[(x-1)^2] - 2[(2x-1)(3x+2)]$$

■ Les crochets marqués ici ne traduisent pas cette fois une convention, mais sont placés arbitrairement pour calculer un « poly-produit ». On aurait tout aussi bien pu les mettre autour des deux premiers termes :

$$-[(x-1)^2] - [2(2x-1)](3x+2)$$

■ Mais l'on aurait commis une erreur « par déformation » (voir cours, *Forme*) si on les avait placés ainsi :

$$\star -[(x-1)^2] [-2(2x-1)](3x+2)$$

$$= -(x^2 - 2x + 1) - 2(6x^2 + 4x - 3x - 2)$$

$$= -x^2 + 2x - 1 - 2(6x^2 + x - 2)$$

■ Il est préférable de réduire la somme algébrique « $6x^2 + 4x - 3x - 2$ » avant de développer de nouveau.

$$= -x^2 + 2x - 1 - 12x^2 - 2x + 4$$

$$= \boxed{-13x^2 + 3}$$

c) $2 - 2(x-1)^2$

$$= +2 - 2[(x-1)^2]$$

$$= +2 - 2(+x^2 - 2x + 1)$$

$$= +2 - 2x^2 + 4x - 2$$

$$= \boxed{-2x^2 + 4x}$$

d) $2[1-(1-a)^2]^2$

$$= 2[+1 - [(1-a)^2]]^2$$

$$= 2[+1 - (+1 - 2a + a^2)]^2$$

$$= 2(+1 - 1 + 2a - a^2)^2$$

$$= 2[(2a - a^2)^2]$$

$$= 2(4a^2 - 4a^3 + a^4)$$

$$= 8a^2 - 8a^3 + 2a^4$$

$$= \boxed{2a^4 - 8a^3 + 8a^2}$$

22

a) Après développement et réduction, on trouve $x^4 - 1$.

b) $(1+x+x^2+\dots+x^{63})(x-1) = x^{64} - 1$

c) En remplaçant x par 2 dans l'égalité précédente, il vient :

$$(1+2+4+8+\dots+2^{63}) \times 1 = 2^{64} - 1$$

$$1+2+4+8+\dots+2^{63} = \boxed{2^{64}-1} \approx 1,8447 \times 10^{19}$$

23

En posant $a = 998877665544$, l'expression s'écrit :
 $a^2 - (a-1)(a+1)$, ce qui, après développement et réduction donne 1.

DEGRÉ

24

Si vous ne comprenez pas les réponses, relisez le paragraphe « Degré » dans les Révisions d'Algèbre.

L'idée, c'est de comprendre pourquoi, lorsqu'on multiplie deux polynômes, on obtient un polynôme dont le degré est la *somme* (et non le produit) des deux polynômes facteurs.

FACTORISATION

25

$$c) \quad ab + b = ab + 1b = \boxed{a(b+1)}$$

$$d) \quad 6x^2y - 9x^3y^2 = 3x^2y \times 2 - 3x^2y \times 3xy \\ = \boxed{3x^2y(2 - 3xy)}$$

26

$$a) \quad AB + AC = \boxed{A(B+C)}$$

b) Dans l'identité précédente, on peut remplacer A par $x-1$, B par $3x+5$ et C par $2x+4$, ce qui donne :

$$(x-1)(3x+5) + (x-1)(2x+4) \\ = (x-1)[(3x+5) + (2x+4)] \\ = (x-1)(+3x+5+2x+4) \\ = \boxed{(x-1)(5x+9)}$$

$$c) \quad AB - AC = \boxed{A(B-C)}$$

$$d) \quad (x-1)(3x+5) - (x-1)(2x+4) \\ = (x-1)[(+3x+5) - (+2x+4)] \\ = (x-1)(+3x+5-2x-4) \\ = (x-1)(+1x+1) \\ = \boxed{(x-1)(x+1)}$$

$$e) \quad A^2 + AB = AA + AB = \boxed{A(A+B)}$$

$$f) \quad (x-1)^2 + (x-1)(2x+4) \\ = (x-1)(x-1) + (x-1)(2x+4) \\ = (x-1)[(x-1) + (2x+4)] \\ = (x-1)(+1x-1+2x+4) \\ = \boxed{(x-1)(+3x+3)} \\ = (x-1)[3(+x+1)] \\ = (x-1) \times 3 \times (x+1) \\ = \boxed{3(x-1)(x+1)}$$

$$g) \quad A - AB = A \times 1 - A \times B = \boxed{A(1-B)}$$

$$h) \quad (x-1) - (x-1)(3x+2) \\ = (x-1) \times 1 - (x-1)(3x+2) \\ = (x-1)[+1 - (+3x+2)] \\ = (x-1)(+1-3x-2) \\ = (x-1)(-3x-1)$$

$$i) \quad -A + BA = A \times (-1) + A \times B = \boxed{A(-1+B)}$$

$$j) \quad -(2x+3) + 5x(2x+3) \\ = (2x+3) \times (-1) + (2x+3) \times 5x \\ = (2x+3)(-1+5x) \\ = \boxed{(2x+3)(5x-1)}$$

27

$$a) \quad x^2 - x \\ = x \times x - x \times 1 \\ = \boxed{x(x-1)}$$

$$b) \quad -2x(x-1) - (x-1)(2x+1) \\ = (x-1)(-2x) - (x-1)(2x+1) \\ = (x-1)[-2x - (+2x+1)] \\ = (x-1)(-2x-2x-1) \\ = \boxed{(x-1)(-4x-1)}$$

$$c) \quad 9x^2(x+2) - 3x(x+2) \\ = (x+2) \times 9x^2 - (x+2) \times 3x \\ = (x+2)(9x^2 - 3x)$$

Lorsqu'un énoncé demande de factoriser, il demande implicitement de factoriser au maximum. Or ici, il est encore possible de poursuivre la factorisation.

$$= (x+2)(3x \times 3x - 3x \times 1) \\ = (x+2)[(3x)(3x-1)] \\ = (x+2)(3x)(3x-1)$$

$$= \boxed{3x(x+2)(3x-1)}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -(x-2) + x(x-2) \\ &= (-1)(x-2) + x(x-2) \\ &= (-1+x)(x-2) \\ &= \boxed{(x-1)(x-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & (x-1)(5x+2) - (2x-2)(x+3) \\ &= (x-1)(5x+2) - 2(x-1)(x+3) \\ &= (x-1)(5x+2) - (x-1)[2(x+3)] \\ &= (x-1)[(5x+2) - 2(x+3)] \\ &= (x-1)[5x+2 - 2x - 6] \\ &= \boxed{(x-1)(3x-4)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & (x-2)(5x+1) + (2-x)(3x+2) \\ &= (x-2)(5x+1) + [-(x-2)](3x+2) \\ &= (x-2)(5x+1) + (-1)(x-2)(3x+2) \\ &= (x-2)(5x+1) + (x-2)(-1)(3x+2) \\ &= (x-2)[(5x+1) + (-1)(3x+2)] \\ &= (x-2)[5x+1 - 3x - 2] \\ &= \boxed{(x-2)(2x-1)} \end{aligned}$$

IDENTITÉS REMARQUABLES

28

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & x^2 + 2x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 \\ &= \boxed{(x+1)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x^2 + 10x + 25 \\ &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= \boxed{(x+5)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & x^2 - 4x + 4 \\ &= x^2 - 2 \times x \times 2 + 2^2 \\ &= \boxed{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad x^2 - 9$$

$$\begin{aligned} &= x^2 - 3^2 \\ &= \boxed{(x-3)(x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & x^2 - \frac{1}{25} \\ &= x^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 \\ &= \boxed{\left(x - \frac{1}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad & 4x^2 - 9 \\ &= (2x)^2 - 3^2 \\ &\quad \text{Rappelons que } 4x^2 \text{ signifie } 4 \times (x^2). \\ &= \boxed{(2x-3)(2x+3)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad & 9x^2 + 12x + 4 \\ &= (3x)^2 + 2 \times (3x) \times 2 + 2^2 \\ &= \boxed{(3x+2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad & 2x^2 + 12x + 18 \\ &= 2(x^2 + 6x + 9) \\ &= 2(x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2) \\ &= \boxed{2(x+3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad & x^3 + 12x^2 + 36x \\ &= x(x^2 + 12x + 36) \\ &= x(x^2 + 2 \times x \times 6 + 6^2) \\ &= \boxed{x(x+6)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad & x^2 - 2 \\ &= x^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= \boxed{(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})} \end{aligned}$$

$$\text{k)} \quad x^2 + 3x + \frac{9}{4}$$

$$= x^2 + 2 \times x \times \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \boxed{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2}$$

l) $-16 + x^2$

$$= x^2 - 16$$

on ordonne d'abord les monômes par degré décroissant.

$$= x^2 - 4^2$$

$$= \boxed{(x-4)(x+4)}$$

m) $8x + 16 + x^2$

$$= x^2 + 8x + 16$$

$$= x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2$$

$$= \boxed{(x+4)^2}$$

29

a) $-1 + x^2$

$$= x^2 - 1^2$$

$$= \boxed{(x-1)(x+1)}$$

On a appliqué la troisième identité remarquable du cours.

b) $-6x + 9 + x^2$

$$= x^2 - 6x + 9$$

$$= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$= (x-3)^2$$

c) $-6x + 9x^2 + 1$

$$= 9x^2 - 6x + 1$$

$$= (3x)^2 - 2 \times 3x \times 1 + 1^2$$

$$= (3x-1)^2$$

d) $x^2 - x + \frac{1}{4}$

$$= x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$= x^2 - 2 \times x \times \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \boxed{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$

e) $2x^2 - 4x + 2$

$$= 2(x^2 - 2x + 1)$$

$$= \boxed{2(x-1)^2}$$

f) $-x^2 - 2x - 1$

$$= -(x^2 + 2x + 1)$$

$$= \boxed{-(x+1)^2}$$

30

a) $a^2 + 9 = a^2 + 3^2$ Non factorisable.

Il n'y a pas d'identité remarquable dont un membre soit $a^2 + b^2$. On ne peut pas factoriser $x^2 + k$ où k serait une constante strictement positive. Cela ne veut pas tout à fait dire, néanmoins, qu'une somme de deux carrés ne soit jamais 'factorisable'. Pour un contre-exemple, voir l'exercice 12.

b) $a^2 - 9 = a^2 - 3^2 = \boxed{(a-3)(a+3)}$

c) $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = \boxed{(a-1)(a+1)}$

d) $a^2 - a = \boxed{a(a-1)}$

e) $9a^2 - 4 = (3a)^2 - 2^2 = \boxed{(3a-2)(3a+2)}$

f) $9a^2 - 4a = 9aa - 4a = \boxed{a(9a-4)}$

g) $-a^2 - 1 = -(a^2 + b^2)$ Non factorisable.

h) $a^2 - 2a^2 + 1 = +1a^2 - 2a^2 + 1 = -1a^2 + 1$

$$= 1^2 - a^2 = \boxed{(1-a)(1+a)}$$

i) $a^2 - 2 = a^2 - (\sqrt{2})^2 = \boxed{(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})}$

j) $a^2 + 2 = a^2 + (\sqrt{2})^2$ Non factorisable.

k) $-a^2 + 2a = \boxed{a(-a+2)}$

l) $1 - 4a^2 = 1^2 - (2a)^2 = \boxed{(1-2a)(1+2a)}$

$$m) \quad 1 - 3a^2 = 1^2 - (\sqrt{3}a)^2 = \boxed{(1 - \sqrt{3}a)(1 + \sqrt{3}a)}$$

$$n) \quad 9a^2 + 4 = (3a)^2 + 2^2 \quad \text{Non factorisable.}$$

31

$$a) \quad x - 2 + x(2 - x)$$

Le facteur commun n'est pas directement visible. Il faut le faire apparaître par une petite transformation. Notons en préalable que $a - b = -(b - a)$. Autrement dit, permuter les termes d'une différence revient à en prendre l'opposé. Pour démontrer cette petite identité, on peut partir de son membre de droite :

$$\begin{aligned} -(b - a) &= -(+b - a) = -b + a = a - b \\ &= -(2 - x) + x(2 - x) \\ &= (-1)(2 - x) + x(2 - x) \\ &= (-1 + x)(2 - x) \\ &= \boxed{(x - 1)(2 - x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad -(x - 1)^2 + (2x - 2)(x + 3) \\ &= (-1)(x - 1)(x - 1) + 2(x - 1)(x + 3) \\ &= (x - 1)[(-1)(x - 1) + 2(x + 3)] \\ &= (x - 1)(-x + 1 + 2x + 6) \\ &= \boxed{(x - 1)(x + 7)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) \quad x^2(x - 2) + x(4 - 2x) + x - 2 \\ &= x^2(x - 2) - 2x(x - 2) + 1(x - 2) \\ &= (x^2 - 2x + 1)(x - 2) \end{aligned}$$

Rappelons que factoriser, c'est factoriser au maximum. Donc il ne faudrait pas s'arrêter là.

$$= \boxed{(x - 1)^2(x - 2)}$$

$$\begin{aligned} d) \quad (6 - x)^2 + x - 6 \\ & \quad 6 - x \text{ et } x - 6 \text{ sont opposés [voir a)]. Leurs carrés sont donc égaux.} \\ &= (x - 6)^2 + (x - 6) \\ & \quad \text{La voie choisie ici, comme souvent, n'est pas la seule. On aurait pu factoriser aussi par } 6 - x. \\ &= (x - 6)(x - 6) + (x - 6) \times 1 \\ &= (x - 6)[(x - 6) + 1] \\ &= (x - 6)(x - 5) \\ &= \boxed{(x - 6)(x - 5)} \end{aligned}$$

C'est égal $(6 - x)(5 - x)$. En effet, permuter les termes d'une différence revient à prendre l'opposé et si l'on prend l'opposé de deux facteurs d'un produit, le produit change deux fois de signe donc ne change pas :

$$(-A)(-B) = AB$$

$$e) \quad (x - 2)^2 - (4 - 3x)^2$$

Vous cherchez le facteur commun et vous ne le trouvez pas ? C'est normal, il n'y en a pas. Ici, ça se complique un peu. On va dégainer les identités remarquables, qui servent surtout à ça : s'attaquer aux factorisations qui résistent. Ici, puisque l'expression est une *différence de deux carrés*, on va pouvoir appliquer l'identité $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$, en considérant que $(x - 2)$ est le A et que $(4 - 3x)$ est le B.

$$\begin{aligned} &= [(x - 2) - (4 - 3x)][(x - 2) + (4 - 3x)] \\ &= (+x - 2 - 4 + 3x)(+x - 2 + 4 - 3x) \\ &= (4x - 6)(-2x + 2) \end{aligned}$$

On peut encore factoriser un peu. Mais comme il ne s'agit que de constantes, ce n'est pas d'une très grande importance. Si on apprend à factoriser, c'est d'abord pour pouvoir résoudre des équations et inéquations de degré 2 ou plus. De ce point de vue, factoriser des constantes n'apportera rien de plus. Mais poursuivons quand même.

$$\begin{aligned} &= [2(2x - 3)][2(-x + 1)] \\ & \quad \text{Ici, il faut résister à la tentation d'un factorisation abusive du « 2 » :} \\ & \quad (2A) \times (2B) \text{ n'est pas égal à } 2(A \times B). \text{ Si l'on prend les choses dans l'autre sens, on peut dire qu'un facteur ne se distribue pas sur un produit. } (2A) \times (2B) \text{ doit être vu comme un « poly-produit » : } 2 \times A \times 2 \times B. \\ &= 2 \times (2x - 3) \times 2 \times (-x + 1) \\ &= \boxed{4(2x - 3)(-x + 1)} \end{aligned}$$

$$f) \quad 4(1 + 2x)^2 - 9x^2$$

Ça ressemble à une différence de deux carrés, mais ça n'en est pas encore. $9x^2$ (à lire « neuf x deux »), n'est pas le carré de $9x$, mais 9 fois le carré de x .

$$\begin{aligned} &= [2(1 + 2x)]^2 - (3x)^2 \\ &= (2 + 4x)^2 - (3x)^2 \\ &= (2 + 4x - 3x)(2 + 4x + 3x) \\ &= \boxed{(x + 2)(7x + 2)} \end{aligned}$$

g) $10000 - x^4$

$$= (100)^2 - (x^2)^2$$

$$= (100 - x^2)(100 + x^2)$$

■ Là, attention, on peut factoriser $100 - x^2$, mais pas $100 + x^2$.

$$= (10^2 - x^2)(100 + x^2)$$

$$= \boxed{(10 - x)(10 + x)(100 + x^2)}$$

h) $x^4 - 2$

$$= (x^2)^2 - (\sqrt{2})^2$$

$$= \left(x^2 - (\sqrt{\sqrt{2}})^2 \right) (x^2 + \sqrt{2})$$

$$= \boxed{(x - \sqrt{\sqrt{2}})(x + \sqrt{\sqrt{2}})(x^2 + \sqrt{2})}$$

i) $1 - x^2 - (1 - x)^2$

$$= (1^2 - x^2) - (1 - x)^2$$

■ Ici, on est tenté de faire apparaître une différence de deux carrés. Donc on aura tendance à tomber dans le piège de la factorisation naïve : $1^2 - x^2 \rightarrow (1 - x)^2$.

■ Résistons à la tentation.

$$= (1 - x)(1 + x) - (1 - x)^2$$

$$= (1 - x)(1 + x) - (1 - x)(1 - x)$$

$$= (1 - x)[(1 + x) - (1 - x)]$$

$$= (1 - x)(1 + x - 1 + x)$$

$$= (1 - x)(2x)$$

$$= \boxed{2x(1 - x)}$$

32

a) $(b^2 + 2b) - (a^2 + 2a)$

$$= b^2 + 2b - a^2 - 2a$$

$$= b^2 - a^2 - 2a + 2b$$

$$= (b - a)(b + a) + 2(-a + b)$$

$$= (b - a)(b + a) + 2(b - a)$$

$$= \boxed{(b - a)(b + a + 2)}$$

b) $(b^2 - b + 1) - (a^2 - a + 1)$

$$= b^2 - b + 1 - a^2 + a - 1$$

$$= b^2 - a^2 - b + a + 1 - 1$$

$$= (b - a)(b + a) - (b - a)$$

$$= (b - a)(b + a) - 1(b - a)$$

$$= \boxed{(b - a)(b + a - 1)}$$

33

Non corrigé.

34

$$a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2a^2b^2$$

$$= (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2$$

$$= (a^2 + b^2 - \sqrt{2}ab)(a^2 + b^2 + \sqrt{2}ab)$$

■ Nous avons pu factoriser $(a^2)^2 + (b^2)^2$, qui est une somme de deux carrés. C'est assez inhabituel pour être mentionné.

INVERSE ET OPPOSÉ

35

d) L'opposé de $+a - b$ s'écrit : $-(+a - b)$. Ce qui est égal à $-a + b$, ce qu'on peut écrire : $+b - a$.

e) D'abord, l'opposé d'un produit de deux facteurs n'est pas égale au produit des opposés.

Ensuite, $(-a) \times (-b) = ab$. Donc son opposé est $-ab$.

40

$$a) \frac{a+b}{c} = \boxed{\frac{a}{c} + \frac{b}{c}}$$

■ Voir dans le Cours, *Les Développement, les diviseurs*.

b) Un numérateur ne se distribue pas (alors qu'on a vu à la question précédente qu'un dénominateur se distribuait sur une somme).

c) On ne peut pas distribuer ni réduire, mais on peut écrire : $\frac{a}{c} \times b$ ou $a \times \frac{b}{c}$.

■ Pour démontrer que $\frac{a \times b}{c} = \frac{a}{c} \times b$, il est plus facile de partir de l'expression de droite : $\frac{a}{c} \times b = \frac{a}{c} \times \frac{b}{1} = \frac{a \times b}{c}$.

$$d) \frac{a}{b \times a} = \frac{1 \times a}{b \times a} = \boxed{\frac{1}{b}}$$

$$e) a \times \frac{b}{c} = \frac{a}{1} \times \frac{b}{c} = \boxed{\frac{ab}{c}} \text{ [Voir b)]}$$

$$f) -\left(\frac{a}{b}\right) = (-1) \times \frac{a}{b} = \frac{-1}{1} \times \frac{a}{b} = \boxed{\frac{-a}{b}}$$

$$g) \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{aa}{bb} = \boxed{\frac{a^2}{b^2}}$$

41

$$a) \frac{2a}{3} - \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}a - \frac{2}{3}a = \boxed{0}$$

■ En effet : $\frac{2a}{3} = \frac{2}{3}a$. C'est expliqué dans le cours.

$$b) \frac{6+2a}{3} + \frac{1}{3}a - 2 = \frac{6}{3} + \frac{2a}{3} + \frac{1}{3}a - 2 = 2 + \frac{2}{3}a + \frac{1}{3}a - 2 = \frac{3}{3}a = \boxed{a}$$

$$c) \frac{3-2a}{-3} + 1 = \frac{+3-2a}{-3} + 1 = \frac{+3}{-3} + \frac{-2a}{-3} + 1 = -1 + \frac{2a}{3} + 1 = \boxed{\frac{2}{3}a}$$

$$d) \frac{a}{-b} - \frac{a}{b} = \frac{+a}{-b} - \frac{a}{b} = -\frac{a}{b} - \frac{a}{b} = \boxed{-\frac{2a}{b}}$$

■ Si vous ne comprenez pas la dernière étape, réfléchissez, puis demandez des explications si nécessaire.

42

$$a) \frac{-1-a}{a+1} = \frac{-(-1-a)}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} = \boxed{1}$$

$$b) \frac{1}{a} - \frac{1-a}{a} = \frac{1}{a} - \frac{(1-a)}{a} = \frac{1-(1-a)}{a} = \frac{1-1+a}{a} = \frac{a}{a} = \boxed{1}$$

■ Voir dans le Cours, *Les Quotients, parenthèses implicites*. C'était exactement l'exemple du cours.

43

$$\begin{aligned} a) \quad & \frac{a+2}{a} - \frac{2-a}{a} = \frac{-(a+2)}{a} - \frac{(2-a)}{a} \\ & = \frac{-(a+2)}{a} + \frac{-(2-a)}{a} \\ & = \frac{-(+a+2) - (+2-a)}{a} \\ & = \frac{-a-2-2+a}{a} \\ & = \frac{-4}{a} \\ & = \boxed{-\frac{4}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad & \frac{a-1}{a+1} - \frac{a+3}{a+1} + \frac{a+5}{a+1} = \frac{(a-1)-(a+3)+(a+5)}{a+1} \\ & = \frac{a-1-a-3+a+5}{a+1} = \frac{a+1}{a+1} = \boxed{1} \end{aligned}$$

44

$$a) \frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = \frac{2 \times 7}{3 \times 5} = \boxed{\frac{14}{15}}$$

$$b) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \boxed{\frac{ad}{bc}}$$

$$c) \frac{a}{\frac{b}{c}} = a \times \frac{c}{b} = \boxed{\frac{ac}{b}}$$

$$d) \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b} \times \frac{1}{c} = \boxed{\frac{a}{bc}}$$

45

$$a) \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{3 \times 2} + \frac{2 \times 1}{2 \times 3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$b) \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1 \times b}{a \times b} + \frac{1 \times a}{b \times a} = \frac{b}{ab} + \frac{a}{ab} = \boxed{\frac{a+b}{ab}}$$

$$c) \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} = \frac{1 \times a}{a \times a} + \frac{1}{a^2} = \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a^2} = \boxed{\frac{a+1}{a^2}}$$

$$d) \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{1 \times 3}{3 \times 3} + \frac{1}{9} = \frac{3}{9} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{4}{9}}$$

$$e) \frac{1}{a} + a = \frac{1}{a} + \frac{a}{1} = \frac{1}{a} + \frac{a \times a}{1 \times a} = \frac{1}{a} + \frac{a^2}{a} = \boxed{\frac{a^2+1}{a}}$$

$$f) \frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} = \frac{1 \times c}{ab \times c} + \frac{1 \times b}{ac \times b} = \frac{c}{abc} + \frac{b}{abc} = \boxed{\frac{b+c}{abc}}$$

$$\begin{aligned} g) \frac{a+2}{a+1} - 1 &= \frac{a+2}{a+1} - \frac{1}{1} = \frac{a+2}{a+1} - \frac{1(a+1)}{1(a+1)} \\ &= \frac{a+2}{a+1} - \frac{a+1}{a+1} = \frac{(a+2) - (a+1)}{a+1} = \frac{a+2-a-1}{a+1} \\ &= \boxed{\frac{1}{a+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h) \frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} &= \frac{1 \times (a+1)}{(a-1)(a+1)} - \frac{1 \times (a-1)}{(a+1) \times (a-1)} \\ &= \frac{a+1}{(a-1)(a+1)} - \frac{a-1}{(a-1) \times (a+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{(a+1) - (a-1)}{(a-1)(a+1)} = \frac{a+1-a+1}{(a-1)(a+1)} \\ &= \boxed{\frac{2}{(a-1)(a+1)}} \end{aligned}$$

■ On peut ensuite développer le dénominateur, mais ce n'est pas toujours judicieux.

$$\begin{aligned} i) \frac{b}{b+1} - \frac{a}{a+1} &= \frac{b(a+1)}{(b+1)(a+1)} - \frac{a(b+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{b(a+1) - a(b+1)}{(a+1)(b+1)} \\ &= \frac{ab + b - ab - a}{(a+1)(b+1)} \\ &= \boxed{\frac{b-a}{(a+1)(b+1)}} \end{aligned}$$

46

$$a) \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}$$

■ Erreur courante : ✖ 5.

■ Voir le Cours, *L'inverse et l'Opposé, inverse d'une somme.*

$$= \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{6} + \frac{2}{6}} = \frac{1}{\frac{5}{6}} = 1 \times \frac{6}{5} = \boxed{\frac{6}{5}}$$

$$b) \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$$

■ Erreur courante : ✖ $a+b$.

■ Voir le Cours, *L'inverse et l'Opposé, inverse d'une somme.*

$$= \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} = \frac{1}{\frac{b}{ab} + \frac{a}{ab}} = \frac{1}{\frac{a+b}{ab}} = 1 \times \frac{ab}{a+b} = \boxed{\frac{ab}{a+b}}$$

47

$$\begin{aligned} a) \frac{a+2}{a} - 2 &= \frac{a+2}{a} - \frac{2}{1} = \frac{a+2}{a} - \frac{2 \times a}{1 \times a} \\ &= \frac{a+2}{a} - \frac{2a}{a} = \frac{a+2-2a}{a} \\ &= \boxed{\frac{-a+2}{a}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{a+1}{b+1} - 1 &= \frac{a+1}{b+1} - \frac{1}{1} = \frac{a+1}{b+1} - \frac{1(b+1)}{1(b+1)} \\
 &= \frac{a+1}{b+1} - \frac{b+1}{b+1} = \frac{(a+1) - (b+1)}{b+1} \\
 &= \frac{+a + 1 - b - 1}{b+1} = \boxed{\frac{a-b}{b+1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{a+1}{b+2} - \frac{1}{2} &= \frac{(a+1) \times 2}{(b+2) \times 2} - \frac{1 \times (b+2)}{2 \times (b+2)} \\
 &= \frac{2a+2}{2(b+2)} - \frac{b+2}{2(b+2)} \\
 &= \frac{2a+2}{2(b+2)} - \frac{b+2}{2(b+2)} \\
 &= \frac{+(2a+2) - (b+2)}{2(b+2)} \\
 &= \frac{+2a + 2 - b - 2}{2(b+2)} \\
 &= \boxed{\frac{2a-b}{2(b+2)}}
 \end{aligned}$$

On peut ensuite développer le dénominateur, mais ce n'est pas toujours judicieux.

48

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{2x^2+3x}{2x} &= \frac{x(2x+3)}{2x} = \frac{x(2x+3)}{2x} = \boxed{\frac{2x+3}{2}} \\
 &= x + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } -2a+2-2\left(\frac{a-2}{2}\right)^2 &= -2a+2-2\frac{(a-2)^2}{2^2} \\
 &= -2a+2-2\frac{(a-2)^2}{2^2} \\
 &= -2a+2-\frac{2}{1} \times \frac{a^2-4a+4}{2 \times 2} \\
 &= -2a+2-\cancel{2} \times \frac{a^2-4a+4}{2 \times \cancel{2}} \\
 &= -2a+2-\left(\frac{a^2-4a+4}{2}\right) \\
 &= -2a+2-\frac{a^2}{2}+\frac{4a}{2}-\frac{4}{2} \\
 &= -2a+2-\frac{a^2}{2}+2a-2 \\
 &= -\frac{a^2}{2}
 \end{aligned}$$

$$= \boxed{-\frac{1}{2}a^2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{a-b}{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}} &= \frac{a-b}{\frac{aa}{ab} - \frac{bb}{ab}} = \frac{a-b}{\frac{a^2-b^2}{ab}} = (a-b) \times \frac{ab}{a^2-b^2} \\
 &= \frac{ab(a-b)}{a^2-b^2} = \frac{ab(a-b)}{(a-b)(a+b)} = \boxed{\frac{ab}{a+b}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } \frac{1}{\frac{1}{1-a} - 1} &= \frac{1}{\frac{1}{1-a} - \frac{1}{1}} = \frac{1}{\frac{1}{1-a} - \frac{1 \times (1-a)}{1 \times (1-a)}} \\
 &= \frac{1}{\frac{1}{1-a} - \frac{1-a}{1-a}} = \frac{1}{\frac{1-(1-a)}{1-a}} = \frac{1}{\frac{1-1+a}{1-a}} \\
 &= \frac{1}{\frac{a}{1-a}} = 1 \times \frac{1-a}{a} = \boxed{\frac{1-a}{a}} = \frac{1}{a} - \frac{a}{a} \\
 &= \frac{1}{a} - 1
 \end{aligned}$$

49

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{1-x^2}{x^2+x} &= \frac{1^2-x^2}{x(x+1)} = \frac{(1-x)(1+x)}{x(x+1)} \\
 &= \frac{(1-x)(x+1)}{x(x+1)} = \boxed{\frac{1-x}{x}} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x} = \frac{1}{x} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \frac{4x^2-6x}{2x-3} &= \frac{2x(2x-3)}{1(2x-3)} = \frac{2x\cancel{(2x-3)}}{1\cancel{(2x-3)}} \\
 &= \frac{2x}{1} = \boxed{2x}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \frac{x^2}{x-1} - x - 1 &= \frac{x^2}{x-1} - (x+1) = \frac{x^2}{x-1} - \frac{x+1}{1} \\
 &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{(x+1)(x-1)}{1(x-1)} \\
 &= \frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{x^2-(x^2-1)}{x-1} \\
 &= \frac{x^2-x^2+1}{x-1} = \boxed{\frac{1}{x-1}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } 2\left(\frac{a^2-b^2}{2} \times \frac{1}{a+b} - a + b\right)^2 \\
 &= 2\left[\frac{(a-b)(a+b)}{2} \times \frac{1}{1 \times (a+b)} - (a-b)\right]^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left[\frac{(a-b) \cancel{(a+b)}}{2} \times \frac{1}{1 \times \cancel{(a+b)}} - (a-b) \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{(a-b)}{2} \times \frac{1}{1} - (a-b) \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{(a-b)}{2} - \frac{(a-b)}{1} \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{(a-b)}{2} - \frac{2(a-b)}{2 \times 1} \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{(a-b)}{2} - \frac{2(a-b)}{2} \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{1(a-b) - 2(a-b)}{2} \right]^2 \\
&= 2 \left[\frac{-1(a-b)}{2} \right]^2 = 2 \times \frac{(-1)^2 (a-b)^2}{2^2} \\
&= 2 \times \frac{1(a-b)^2}{2 \times 2} = \cancel{2} \times \frac{1(a-b)^2}{2 \times \cancel{2}} \\
&= \boxed{\frac{(a-b)^2}{2}}
\end{aligned}$$

■ C'est la même chose que $\frac{(b-a)^2}{2}$, pour les raisons expliquées dans l'exercice 9 d).

50

- a) La voiture a parcouru 4km.
Notons t le temps que dure la descente (en heure).

On a : $\frac{2}{t} = 120$ (la vitesse est le quotient de la

distance sur le temps). D'où $\frac{2}{t} \times t = 120 \times t$

$2 = 120t$. D'où $\frac{2}{120} = t$. D'où $t = \frac{1}{60}$. La descente

dure un soixantième d'heure, c'est-à-dire 1min.

De même, on trouve que la montée dure un quarantième d'heure. L'ensemble du parcours dure,

en heure : $\frac{1}{60} + \frac{1}{40} = \frac{2}{120} + \frac{3}{120} = \frac{5}{120} = \frac{1}{24}$.

Le trajet total dure donc $\frac{1}{24}$ h.

La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est donc, en km/h de :

$$\frac{4}{\frac{1}{24}} = 4 \times \frac{24}{1} = 96.$$

La vitesse moyenne est de $\boxed{96 \text{ km/h}}$

- b) La voiture a parcouru en tout une distance de $2d$.

Notons t la durée de la descente. On a : $v_1 = \frac{d}{t}$ d'où

$$t = \frac{d}{v_1}.$$

De même, le temps de la montée est de $\frac{d}{v_2}$.

Donc le temps du trajet total est : $\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}$.

La vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet est donc :

$$\begin{aligned}
\frac{2d}{\frac{d}{v_1} + \frac{d}{v_2}} &= \frac{2d}{d \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} = \frac{2\cancel{d}}{\cancel{d} \left(\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} \right)} \\
&= \boxed{\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}}}
\end{aligned}$$

C'est la « moyenne harmonique » des deux vitesses.

On peut simplifier cette expression :

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}} &= \frac{2}{\frac{v_2}{v_1 v_2} + \frac{v_1}{v_1 v_2}} = \frac{2}{\frac{v_1 + v_2}{v_1 v_2}} = 2 \times \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2} \\
&= \boxed{\frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2}}
\end{aligned}$$

RACINE

51

a) $\sqrt{9} = \boxed{3}$

b) $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = \boxed{2}$

c) $-\sqrt{1} = \boxed{-1}$ (Car la racine de , c'est 1.)

d) $\sqrt{-1}$ n'existe pas. Les nombre strictement négatifs n'ont pas de racine (qui soit un nombre réel), car le carré d'un réel est toujours positif.

e) $\sqrt{0} = \boxed{0}$

f) $\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$

g) $\sqrt{\frac{1}{9}} = \boxed{\frac{1}{3}}$

Car le carré de $\frac{1}{3}$, c'est $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$, qui est égal à $\frac{1}{9}$.

$$\text{h)} \quad \sqrt{\frac{4}{9}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

$$\text{i)} \quad \sqrt{0,01} = \sqrt{\frac{1}{100}} = \frac{1}{10} = \boxed{0,1}$$

$$\text{j)} \quad \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \boxed{2}, \text{ car par définition, la racine de 2 est le nombre (positif) dont le carré est 2.}$$

$$\text{k)} \quad \sqrt{4 \times 9} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

$$\text{l)} \quad \sqrt{4} \times \sqrt{9} = 2 \times 3 = \boxed{6}$$

$$\text{m)} \quad \sqrt{\frac{9}{4}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\text{n)} \quad \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\text{o)} \quad \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = \boxed{5}$$

$$\text{p)} \quad \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3 + 4 = \boxed{7}$$

$$\text{q)} \quad \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$\text{r)} \quad \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5 - 4 = \boxed{1}$$

$$\text{s)} \quad \sqrt{\sqrt{9} - \sqrt{4}} = \sqrt{3-2} = \sqrt{1} = \boxed{1}$$

$$\text{t)} \quad \boxed{\sqrt{\sqrt{2}}} \text{ On ne peut pas simplifier.}$$

$$\begin{aligned} \text{u)} \quad \sqrt{\frac{\sqrt{1+\sqrt{9}}}{\sqrt{9}+\sqrt{25}}} &= \sqrt{\frac{\sqrt{1+3}}{3+5}} = \sqrt{\frac{\sqrt{4}}{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{v)} \quad \sqrt{2^{12}} = \sqrt{(2^6)^2} = 2^6 = \boxed{64}$$

52

$$\text{a)} \quad 5\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = \boxed{8\sqrt{2}}$$

$$\text{b)} \quad \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = \boxed{3\sqrt{2}}$$

$$\text{c)} \quad 2\sqrt{2} + 5\sqrt{3} \text{ irréductible.}$$

$$\text{d)} \quad \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{2} + \frac{1}{3}\sqrt{2} = \frac{3}{3}\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\text{e)} \quad \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ est irréductible.}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 3 \times \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} &= (3 \times 2) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{3} \\ &= 6 \times 2 \times \sqrt{2} = \boxed{12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad (\sqrt{2})^3 &= \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times \sqrt{2} \\ &= 2 \times \sqrt{2} = \boxed{2\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\text{h)} \quad (2 - \sqrt{2})^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = \boxed{6 - 4\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad (\sqrt{3} + \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) &= (\sqrt{3})^2 - (\sqrt{2})^2 \\ &= 3 - 2 = \boxed{1} \end{aligned}$$

53

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{2} - \sqrt{5} &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + 1\sqrt{2} - 1\sqrt{5} \\ &= \boxed{4\sqrt{2} + \sqrt{5}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} - \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= 1 + \sqrt{2} + \frac{2}{2}\sqrt{3} + 2 - \frac{1}{2}\sqrt{3} = \boxed{3 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (-\sqrt{3})^3 &= (-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) \\ &= [(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})](-\sqrt{3}) = +3(-\sqrt{3}) \\ &= \boxed{-3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (-\sqrt{3})^4 &= (-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) \\ &= [(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})][(-\sqrt{3})(-\sqrt{3})] \\ &= (+3)(+3) = \boxed{9} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad (1 - \sqrt{3})^2 &= 1^2 - 2 \times 1 \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 \\ &= 1 - 2\sqrt{3} + 3 = \boxed{4 - 2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad (\sqrt{2} + 1)^3 &= (\sqrt{2} + 1)^2 (\sqrt{2} + 1) \\ &= (2 + 2\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} + 1) = (3 + 2\sqrt{2})(\sqrt{2} + 1) \\ &= 3\sqrt{2} + 3 + 4 + 2\sqrt{2} = \boxed{7 + 5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

54

$$a) \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

Mais attention, car la première expression existe lorsque a et b sont tous deux négatifs (ou tous deux positifs, bien sûr), alors que le résultat n'existe que si a et b sont tous deux positifs.

$$b) \sqrt{a+b} \quad \text{On ne peut rien faire.}$$

$$c) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}. \text{ M\^eme remarque qu'au a).}$$

$$d) (a \text{ et } b \text{ doivent \^etre tous deux positifs.})$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2$$

$$= \boxed{a + 2\sqrt{a}\sqrt{b} + b}$$

$$e) \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{On ne peut rien faire.}$$

$$f) \text{ Pour que l'expression initiale existe, } a \text{ doit \^etre positif.}$$

$$(\sqrt{a})^2 = \boxed{a}$$

$$g) \sqrt{a^2} = \boxed{|a|} \text{ (valeur absolue de } a\text{).}$$

En effet, si a est positif, \^elever au carr\^e puis prendre la racine, cela revient \^a ne rien faire. Mais si a est n\^egatif, son signe moins est \^elimin\^e au moment de l'\^elevation au carr\^e.

(Voir \^a la fin du Cours, Valeur Absolue.)

55

$$a) \sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{2 \times 3} = \boxed{\sqrt{6}}$$

$$b) \sqrt{2} + \sqrt{3} \text{ est irr\^eductible.}$$

Nous avons d\^ej\^a rencontr\^e cette somme dans l'exercice 52

$$c) \sqrt{2} \times \sqrt{3} - 2 \times \sqrt{6} = \sqrt{2 \times 3} - 2 \times \sqrt{6}$$

$$= 1\sqrt{6} - 2 \times \sqrt{6} = \boxed{-\sqrt{6}}$$

$$d) \sqrt{1} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 1 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{6}$$

$$= 4 \times \sqrt{2 \times 3 \times 6} = 4 \times \sqrt{36} = 4 \times 6 = \boxed{24}$$

$$e) (2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{2}) = 2 \times 3 \times \sqrt{3} \times \sqrt{2} = \boxed{6\sqrt{6}}$$

$$f) (2\sqrt{3}) \times (3\sqrt{3}) = 6 \times 3 = \boxed{18}$$

$$g) (-2\sqrt{5}) \times (+7\sqrt{2}) = -14 \times \sqrt{5 \times 2} = \boxed{-14\sqrt{10}}$$

$$h) (-3\sqrt{5}) \times (-4\sqrt{5}) = +12 \times 5 = \boxed{60}$$

$$i) (-2\sqrt{5})(2\sqrt{15} - 5\sqrt{5} - 3)$$

$$= (-2\sqrt{5})(+2\sqrt{3}\sqrt{5} - 5\sqrt{5} - 3)$$

$$= -4 \times 5 \times \sqrt{3} + 10 \times 5 + 6\sqrt{5}$$

$$= -20\sqrt{3} + 50 + 6\sqrt{5}$$

$$= \boxed{50 + 6\sqrt{5} - 20\sqrt{3}}$$

$$j) (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2$$

$$= 2 - 2\sqrt{6} + 3 = \boxed{5 - 2\sqrt{6}}$$

$$k) (3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$= (+3\sqrt{3} - 2\sqrt{2})(+3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

$$= 9\sqrt{6} - 6 \times 3 - 6 \times 2 + 4\sqrt{6}$$

$$= 9\sqrt{6} - 18 - 12 + 4\sqrt{6}$$

$$= \boxed{13\sqrt{6} - 30}$$

56

$$a) \sqrt{5} \times \sqrt{5} = \boxed{5}$$

$$b) \sqrt{5} + \sqrt{5} = 1\sqrt{5} + 1\sqrt{5} = \boxed{2\sqrt{5}}$$

$$c) \sqrt{5} + \sqrt{7} \text{ est irr\^eductible.}$$

$$d) 2\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + 2 \text{ est irr\^eductible.}$$

$$e) (+3\sqrt{5})(-2\sqrt{2}) = \boxed{-6\sqrt{6}}$$

$$f) (-5\sqrt{3})(-2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) = +10 \times 3 - 15 \times \sqrt{6}$$

$$= \boxed{30 - 15\sqrt{6}}$$

$$g) (2\sqrt{3} + 3\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{3})^2 + 2 \times 2\sqrt{3} \times 3\sqrt{5} + (3\sqrt{2})^2$$

$$= 4 \times 3 + 12 \times \sqrt{3 \times 5} + 9 \times 5$$

$$= 12 + 12\sqrt{15} + 45$$

$$= \boxed{57 + 12\sqrt{15}}$$

57

a) $\sqrt{12} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ On utilise ici la distributivité du radical sur le produit.

b) $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

c) $\sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = \sqrt{4} \times \sqrt{11} = 2\sqrt{11}$

d) $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

e) $\sqrt{252} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{7} = 2 \times 3 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$

f) $\sqrt{2^9} = \sqrt{2^4 \times 2^4 \times 2^1} = \sqrt{(2^4)^2 \times 2^1} = \sqrt{(2^4)^2} \times \sqrt{2} = 2^4 \times \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$

58 $\sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18} = \sqrt{9 \times 2} = \sqrt{9} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

c) $\sqrt{108} = \sqrt{2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{3} = 2 \times 3 \times \sqrt{3} = 6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{1300} = \sqrt{10 \times 10 \times 13} = \sqrt{10 \times 10} \times \sqrt{13} = 10\sqrt{13}$

e) $\sqrt{52} = \sqrt{52} = \sqrt{2 \times 2 \times 13} = \sqrt{2 \times 2} \times \sqrt{13} = 2\sqrt{13}$

f) $\sqrt{99} = \sqrt{3 \times 3 \times 11} = \sqrt{3 \times 3} \times \sqrt{11} = 3\sqrt{11}$

g) $\sqrt{24} = \sqrt{4 \times 6} = \sqrt{4} \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$

59

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$

b) $\sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{2} - \sqrt{4 \times 2} = \sqrt{2} - \sqrt{4} \times \sqrt{2} = +1\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = -1\sqrt{2} = -\sqrt{2}$

c) $4 - \sqrt{8} = 4 - 2\sqrt{2}$

d) $4\sqrt{8} - \sqrt{18} - \sqrt{50} = 4 \times 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 3\sqrt{2} - 5\sqrt{2} = 0$

e) $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4} + \sqrt{8} + \sqrt{12} = 1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2 + 2\sqrt{2} + 2\sqrt{3} = 3 + 3\sqrt{2} + 3\sqrt{3}$

60

a) $\sqrt{75} + \sqrt{12} = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{4 \times 3} = 5\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = 7\sqrt{3}$

b) $\sqrt{27} - \sqrt{12} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$

c) $\sqrt{9+3} - \sqrt{9} - \sqrt{3} = \sqrt{12} - 3 - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - 3 - 1\sqrt{3} = \sqrt{3} - 3$

61

$$a) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

Cet exemple était déjà traité dans le cours.

Remarquons que $\frac{1}{2}a$ se lit « un demi de a ». C'est la

moitié de a donc c'est aussi $\frac{a}{2}$. Voici une preuve

plus algébrique : $\frac{1}{2}a = \frac{1}{2} \times a = \frac{1}{2} \times \frac{a}{1} = \frac{1 \times a}{2 \times 1} = \frac{a}{2}$

$$b) \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\sqrt{6}}$$

$$c) \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \frac{1(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} = \frac{\sqrt{2}-1}{(\sqrt{2})^2-1^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2}-1}{2-1} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} = \boxed{\sqrt{2}-1}$$

$$d) \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1} = \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{5})^2 + 2 \times \sqrt{5} \times 1 + 1^2}{(\sqrt{5})^2 - 1^2}$$

$$= \frac{5+2\sqrt{5}+1}{(\sqrt{5})^2-1^2} = \frac{6+2\sqrt{5}}{5-1}$$

$$= \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6}{4} + \frac{2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \boxed{\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}$$

$$e) \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1 \times \sqrt{5}}{\sqrt{5} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} = \boxed{\frac{1}{5}\sqrt{5}}$$

62

$$a) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{3}}$$

$$b) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})}$$

$$= \frac{2-\sqrt{6}}{2-3} = \frac{2-\sqrt{6}}{-1} = \frac{+2}{-1} - \frac{\sqrt{6}}{-1}$$

$$= \frac{+2}{-1} + \frac{-\sqrt{6}}{-1} = \boxed{-\frac{1}{2} + \sqrt{6}}$$

$$c) \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}$$

$$= \frac{2\sqrt{6}}{3} = \boxed{\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

63

$$a) \sqrt{27} = \sqrt{9 \times 3}$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{3}$$

$$= \boxed{3\sqrt{3}}$$

$$b) \sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{27} + \sqrt{12} = \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{4 \times 3}$$

$$= \sqrt{9} \times \sqrt{3} + \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3} = \boxed{5\sqrt{3}}$$

$$c) \sqrt{27} + \sqrt{18} = \sqrt{9 \times 3} + \sqrt{9 \times 2} = \boxed{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}$$

$$d) \sqrt{8} + \sqrt{9} + \sqrt{11} + \sqrt{12} = \sqrt{4 \times 2} + 3 + \sqrt{11} + \sqrt{4 \times 3}$$

$$= \boxed{2\sqrt{2} + 3 + \sqrt{11} + 2\sqrt{3}}$$

$$e) (\sqrt{8} - \sqrt{2})^2$$

On peut certes distribuer :

$$= (\sqrt{8})^2 - 2\sqrt{8}\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2$$

$$= 8 - 2\sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{2} + 2$$

$$= 10 - 2 \times 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$$

$$= 10 - 2 \times 2 \times 2 = 10 - 8 = \boxed{2}$$

Mais il y a plus simple :

$$= (\sqrt{4 \times 2} - \sqrt{2})^2$$

$$= (2\sqrt{2} - 1\sqrt{2})^2$$

$$= (\sqrt{2})^2 = \boxed{2}$$

$$f) \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2 \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{2}{3}\sqrt{3}.$$

$$g) \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = \frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$$

$$= \frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2})^2-1^2} = \frac{2+2\sqrt{2}+1}{2-1} = \frac{3+2\sqrt{2}}{1}$$

$$= \boxed{3+2\sqrt{2}}$$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} &= \frac{1(\sqrt{2}-\sqrt{3})}{(\sqrt{2}+\sqrt{3})(\sqrt{2}-\sqrt{3})} \\ &= \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2-3} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{-1} \\ &= -(\sqrt{2}-\sqrt{3}) = \boxed{-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{i)} \quad \sqrt{6} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} &= \sqrt{3} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} + \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= \sqrt{3} \times 2 + \frac{\sqrt{3} \times \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} \\ &= \boxed{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On aurait pu procéder autrement :

$$\sqrt{6 \times 2} + \sqrt{\frac{6}{2}} = \sqrt{12} + \sqrt{3} = 2\sqrt{3} + \sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{3}}$$

« Ben c'est plus simple, non ? Pourquoi ne pas avoir proposé ça direct ?

— Pour changer. »

$$\begin{aligned} \text{j)} \quad \sqrt{\frac{27}{8}} &= \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{8}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{3} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{3\sqrt{6}}{2 \times 2} = \frac{3\sqrt{6}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}\sqrt{6}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{k)} \quad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} + \frac{2}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)} + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} \\ &= \frac{2-\sqrt{2}}{2-1} + \frac{2\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{1} + \sqrt{2} \\ &= 2-\sqrt{2}+\sqrt{2} = \boxed{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{l)} \quad \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} &= \frac{1(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{(\sqrt{3})^2-1^2} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-1} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{5-\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}-1+5-\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{4}{2} = \boxed{2} \end{aligned}$$

64

$$\text{a)} \quad \sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \sqrt{27} - \sqrt{8} - \sqrt{3} + \sqrt{98} \\ &= \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 2} - \sqrt{3} + \sqrt{49 \times 2} \\ &= +3\sqrt{3} - 2\sqrt{2} - 1\sqrt{3} + 7\sqrt{2} \\ &= \boxed{2\sqrt{3} + 5\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad (\sqrt{2}-\sqrt{3})^3 &= (\sqrt{2}-\sqrt{3})^2(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\ &= (2-2\sqrt{6}+3)(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\ &= (+5-2\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{3}) \\ &= 5\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{6}\sqrt{2}+2\sqrt{6}\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{3 \times 2}\sqrt{2}+2\sqrt{2 \times 3}\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{3}\sqrt{2}\sqrt{2}+2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{3} \\ &= 5\sqrt{2}-5\sqrt{3}-2\sqrt{3} \times 2 + 2\sqrt{2} \times 3 \\ &= +5\sqrt{2} - 5\sqrt{3} - 4\sqrt{3} + 6\sqrt{2} \\ &= \boxed{11\sqrt{2} - 9\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Étapes
facultatives

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad (1+\sqrt{2})^2 - 3 - 2\sqrt{2} \\ &= 1 + 2\sqrt{2} + 2 - 3 - 2\sqrt{2} \\ &= \boxed{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad 1 - \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} &= 1 - \frac{(\sqrt{3}-1) \times \sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \\ &= 1 - \frac{3-\sqrt{3}}{3} = 1 - \left(\frac{3-\sqrt{3}}{3} \right) \\ &= 1 - \left(+1 - \frac{1}{3}\sqrt{3} \right) = 1 - 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ &= \boxed{\frac{1}{3}\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{f)} \quad 1 + \frac{2}{1+\sqrt{3}} &= 1 + \frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} \\ &= 1 + \frac{2-2\sqrt{3}}{1^2-(\sqrt{3})^2} = 1 + \frac{2-2\sqrt{3}}{1-3} \\ &= 1 + \frac{2-2\sqrt{3}}{-2} = 1 - 1 + \sqrt{3} = \boxed{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{g)} \quad \frac{1}{\sqrt{2}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} \\ &= \frac{1(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{1(\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1} + \frac{3\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2-3} \\
&= \frac{\sqrt{2}+1}{1} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{-1} \\
&= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - (\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
&= \sqrt{2} + 1 + \sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \\
&= \boxed{+1}
\end{aligned}$$

65

a) $(\sqrt{3}-5)^2 + \sqrt{3}(9-\sqrt{3})$

$$\begin{aligned}
&= 3 - 10\sqrt{3} + 25 + 9\sqrt{3} - 3 \\
&= \boxed{25 - \sqrt{3}}
\end{aligned}$$

b) $\sqrt{72} + \sqrt{32} - 6\sqrt{8} = \sqrt{36 \times 2} + \sqrt{16 \times 2} - 6\sqrt{4 \times 2}$

$$\begin{aligned}
&= 6\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6 \times 2\sqrt{2} \\
&= 10\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = \boxed{-2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

c) $\frac{2\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{(1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3})} = \frac{2\sqrt{3}+6}{1-3}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2\sqrt{3}+6}{-2} = \frac{+2\sqrt{3}}{-2} + \frac{+6}{-2} = \boxed{-\sqrt{3}-3}
\end{aligned}$$

d) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^3 = (\sqrt{2}+\sqrt{3})^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})$

$$\begin{aligned}
&= (2+2\sqrt{6}+3)(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\
&= (5+2\sqrt{6})(\sqrt{2}+\sqrt{3}) \\
&= 5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+2\sqrt{3 \times 2 \times 2}+2\sqrt{2 \times 3 \times 3} \\
&= 5\sqrt{2}+5\sqrt{3}+4\sqrt{3}+6\sqrt{2} \\
&= \boxed{11\sqrt{2}+9\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

66

$$\frac{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}}$$

Remarquons tout d'abord que l'expression initiale n'existe que si a et b sont positifs et non tous deux nuls. Les calculs qui suivent ne sont en outre valables que si a est différent de b .

$$\begin{aligned}
&= \frac{(b\sqrt{a}+a\sqrt{b})(\sqrt{b}-\sqrt{a})}{(\sqrt{b}+\sqrt{a})(\sqrt{b}-\sqrt{a})} \\
&= \frac{b\sqrt{a}\sqrt{b}-b\sqrt{a}\sqrt{a}+a\sqrt{b}\sqrt{b}-a\sqrt{b}\sqrt{a}}{(\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2} \\
&= \frac{b\sqrt{ab}-ba+ab-a\sqrt{ab}}{b-a} \\
&= \frac{b\sqrt{ab}-a\sqrt{ab}}{b-a} = \frac{(b-a)\sqrt{ab}}{b-a} = \boxed{\sqrt{ab}}
\end{aligned}$$

Rigoureusement, il faut encore vérifier que le résultat reste le même lorsque $a = b$. Et en effet, lorsque $a = b$:

$$\frac{a\sqrt{a}+a\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{a}} = \frac{2a\sqrt{a}}{2\sqrt{a}} = a. \text{ Or } a \text{ est en effet égal à } \sqrt{aa}.$$

Proposons une seconde méthode : au lieu de multiplier par la quantité conjuguée (du dénominateur), on peut factoriser le numérateur :

$$\begin{aligned}
\frac{b\sqrt{a}+a\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} &= \frac{\sqrt{b}\sqrt{b}\sqrt{a}+\sqrt{a}\sqrt{a}\sqrt{b}}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} \\
&= \frac{\sqrt{a}\sqrt{b}(\sqrt{b}+\sqrt{a})}{\sqrt{b}+\sqrt{a}} = \sqrt{a}\sqrt{b} = \boxed{\sqrt{ab}}
\end{aligned}$$

67

On peut élever au carré, séparément, chaque membre de l'égalité à démontrer. Puisque ces membres sont positifs, si leurs carrés sont égaux, ils sont égaux.

$$(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^2 = \underline{3+2\sqrt{2}}$$

$$(\sqrt{2}+1)^2 = 2+2\sqrt{2}+1 = \underline{3+2\sqrt{2}}$$

68

a) $\sqrt{\sqrt{5}+1} \times \sqrt{\sqrt{5}-1} = \sqrt{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}$

$$= \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

b) $\frac{\sqrt{\sqrt{2}+1}}{\sqrt{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}}$

Il faut un peu de créativité calculatoire, dans cette question : ça ne vient pas tout seul.

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}} \quad \begin{array}{l} \text{Il est préférable de résister} \\ \text{ici à la tentation de} \\ \text{développer le numérateur.} \end{array}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{1}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \boxed{\sqrt{2}+1}$$

Si l'on avait développé le numérateur, on aurait trouvé $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$, ce qui est plus compliqué et qu'on n'aurait su comment simplifier.

69

a) $\sqrt[3]{27} = 3$ car $3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27$

b) $\sqrt[3]{-1000} = -10$
car $(-10)^3 = (-10)(-10)(-10) = -1000$

c) $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \frac{1}{2}$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$

d) $\sqrt[3]{-1} = -1$ car $(-1)(-1)(-1) = -1$

70

Attention, car A est strictement négatif. En effet, $5 - 2\sqrt{6}$ est inférieur à $5 + 2\sqrt{6}$. « Donc » $\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$ est strictement inférieur à $\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$. (Nous ne démontrons pas ici cette dernière affirmation. Le fait que des racines de deux nombres positifs soient dans le même ordre que ces nombres sera démontré dans le chapitre sur les sens de variation des fonctions.)

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{5 - 2\sqrt{6}} - \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} \right)^2 \\ &= 5 - 2\sqrt{6} - 2\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}\sqrt{5 + 2\sqrt{6}} + 5 + 2\sqrt{6} \\ &= 10 - 2\sqrt{(5 - 2\sqrt{6})(5 + 2\sqrt{6})} \\ &= 10 - 2\sqrt{25 - 24} = 10 - 2\sqrt{1} = 10 - 2 \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

Donc, comme A est négatif, il est égal non pas à $\sqrt{8}$, mais à $-\sqrt{8}$, c'est-à-dire à $\boxed{-2\sqrt{2}}$

71

Non corrigé : voir avec le professeur.

72

Il faut déjà, pour que l'égalité ait un sens, que a et b soient positifs.

$$\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{a+b})^2 = (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \quad \begin{array}{l} \text{(car les deux membres de} \\ \text{la première égalité sont} \\ \text{de même signe.)} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow a+b = a+2\sqrt{ab}+b$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2\sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \sqrt{ab}$$

$$\Leftrightarrow 0 = ab$$

$$\Leftrightarrow \boxed{a=0 \text{ ou } b=0}$$

PUISSANCE

73

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 4 \times 2 = \boxed{8}$$

a) $(-2)^3 = (-2) \times (-2) \times (-2) = (+4) \times (-2) = \boxed{-8}$

b) $-3^2 = -(3^2) = \boxed{-9}$

c) $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2}$
 $= \sqrt{2} \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2}) \times (\sqrt{2} \times \sqrt{2})$
 $= \sqrt{2} \times 2 \times 2 = \boxed{4\sqrt{2}}$

e) $3^0 = \boxed{1}$

f) $2^{+3} = 8$ donc $2^{-3} = \boxed{\frac{1}{8}}$

g) $3^{+2} = 9$ donc $3^{-2} = \boxed{\frac{1}{9}}$

h) $(-1)^{+1} = -1$ donc $(-1)^{-1} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$

$$i) \left(\frac{1}{2}\right)^{+3} = \frac{1}{8} \quad \text{donc} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \boxed{8}$$

j) 0^{-1} n'existe pas. Ce serait l'inverse de 0.

$$k) (-1)^0 = \boxed{1}$$

$$l) \frac{2^{2018}}{2^{2017}} = \frac{\overbrace{2 \times 2 \times \dots \times 2}^{2018 \text{ facteurs}}}{\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{2017 \text{ facteurs}}} = \frac{2 \times \cancel{2 \times \dots \times 2}}{\cancel{2 \times \dots \times 2}} = \boxed{2}$$

$$m) \frac{2018^2 - 2017^2}{2018 + 2017} = \frac{(2018 - 2017)(2018 + 2017)}{2018 + 2017} = \frac{(2018 - 2017) \cancel{(2018 + 2017)}}{\cancel{2018 + 2017}} = \boxed{1}$$

$$n) (-1)^{2017} = (-1) \underbrace{(-1)(-1)\dots(-1)(-1)}_{2016 \text{ facteurs}} = (-1) \times 1 = \boxed{-1}$$

$$o) (-1)^{2018} = \boxed{+1}$$

74

a) $a^5 + a^3 = 1a^5 + 1a^3$. Irréductible, car somme de deux monômes d'unités littérales différentes.

$$b) a^5 + a^5 = 1a^5 + 1a^5 = \boxed{2a^5}$$

$$c) a^5 + a = 1aaaaa + 1a \quad \text{Irréductible.}$$

$$d) a^5 \times a^3 = aaaaa \times aaa = \boxed{a^8}$$

$$e) a^5 \times a^5 = \boxed{a^{10}}$$

$$f) a^5 \times a = a^5 \times a^1 = \boxed{a^6}$$

$$g) a^2 \times b^3 = \boxed{a^2 b^3}$$

h) $a^3 + b^3$ On ne peut rien faire d'intéressant.

$$i) \frac{a^6}{a^2} = \frac{aaaaa \cancel{a}}{\cancel{a} \cancel{a}} = \boxed{a^4}$$

$$j) (ab)^3 = ababab = aaabbb = \boxed{a^3 b^3}$$

$$k) (a^2)^3 = a^2 a^2 a^2 = \boxed{a^6}$$

$$l) \frac{a}{a^7} = \frac{a^1}{a^7} = \frac{1}{a^6} = \boxed{a^{-6}}$$

$$m) a^n \times a^p = \boxed{a^{n+p}}$$

$$n) \boxed{a^{n-p}}$$

o) $a^n + a^p$ On ne peut rien faire d'intéressant.

p) $(a+b)^n$ On pourrait développer si l'on connaissait la valeur de n. Sinon, en l'absence de notations adaptées, on ne peut pas faire grand-chose.

$$q) (ab)^n = \boxed{a^n b^n}$$

$$r) (a^n)^p = \boxed{a^{np}}$$

$$s) a^n + a^n = 1a^n + 1a^n = \boxed{2a^n}$$

t) $a^n + b^n$ On ne peut rien faire d'intéressant.

75

$$a) 2a^3 = \boxed{2aaa}$$

$$b) -a^2 = \boxed{-aa}$$

$$c) ab^3 = \boxed{abbbb}$$

76

$$a) -a^2 = -[(-2)^2]$$

Les crochets rendent compte de la priorité de l'exposant sur le moins-opposé. Les parenthèses rendent compte de protéger l'intégrité de a lors de sa spécification (c'est-à-dire lorsqu'on remplace la lettre a par sa valeur).

$$= \boxed{-4}$$

$$b) -a^3 = -[(-2)^3] = -(-8) = \boxed{8}$$

$$\begin{aligned} c) -a^3 + 3a^2 &= -[(-2)^3] + 3 \times (-2)^2 \\ &= -(-8) + 3 \times (+4) \\ &= +8 + 12 \\ &= \boxed{20} \end{aligned}$$

77

$$\begin{aligned}
 \text{a) } (-a^{-2}b^{-3})^4 &= [(-1) \times a^{-2} \times b^{-3}]^4 \\
 &= (-1)^4 \times (a^{-2})^4 \times (b^{-3})^4 \\
 &= \boxed{a^{-8}b^{-12}} \\
 \text{b) } \left(-\frac{a^{-3}}{a^{-5}}\right)^2 &= (-1)^2 \times \frac{(a^{-3})^2}{(a^{-5})^2} = +1 \times \frac{a^{-6}}{a^{-10}} = a^{(-6)-(-10)} \\
 &= a^{-6+10} = \boxed{a^4} \\
 \text{c) } \frac{(a^{50}-a^{49})^2}{a^{49}} &= \frac{a^{100}-2a^{99}+a^{98}}{a^{49}} = \frac{a^{100}}{a^{49}} - \frac{2a^{99}}{a^{49}} + \frac{a^{98}}{a^{49}} \\
 &= \boxed{a^{51}-2a^{50}+a^{49}}
 \end{aligned}$$

78

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{a^{21}-a^{20}}{a^{11}-a^{10}} &= \frac{a^{20}(a-1)}{a^{10}(a-1)} = \frac{a^{20}}{a^{10}} = \boxed{a^{10}} \\
 \text{b) } &\text{On risque ici de trouver le bon résultat en commettant} \\
 &\text{pourtant une erreur :} \\
 &\frac{a^{11}-a}{a^6+a} \not\rightarrow \frac{a^{11}}{a^6} - \frac{a}{a} \text{ . Un petit contre-exemple pour} \\
 &\text{se convaincre de la fausseté de cette « règle » :} \\
 &3 = \frac{10-1}{2+1} \neq \frac{10}{2} - \frac{1}{1} = 4 \\
 &\frac{a^{11}-a}{a^6+a} = \frac{a(a^{10}-1)}{a(a^5+1)} = \frac{(a^5)^2-1}{a^5+1} \\
 &= \frac{(a^5-1)(a^5+1)}{a^5+1} = \boxed{a^5-1}
 \end{aligned}$$

79

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{2^{2018}-2^{2017}}{2^{2017}-2^{2016}} &= \frac{2^{2017}(2-1)}{2^{2016}(2-1)} = \frac{2^{2017}}{2^{2016}} = \boxed{2} \\
 &\text{(On pouvait aussi se contenter de factoriser 2 au} \\
 &\text{numérateur.)} \\
 \text{b) } (-2^{-6} \times 3^7)^5 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{33} &= (-1)^5 2^{-30} \times 3^{35} \times \frac{2^{33}}{3^{33}} \\
 &= -2^{-30} \times 2^{33} \times 3^{35} \times 3^{-33} \\
 &= -2^3 \times 3^2 = -8 \times 9 = \boxed{-72}
 \end{aligned}$$

80

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{2^{2n+1}}{2^{n+1}} &= 2^{(2n+1)-(n+1)} = 2^{(2n+1)-n} = 2^{2n+1-n-1} = \boxed{2^n} \\
 \text{b) } \frac{2^{n+2}-2^n}{3} &= \frac{2^n(2^2-1)}{3} = \frac{2^n(4-1)}{3} = \frac{3 \times 2^n}{3} \\
 &= \boxed{2^n} \\
 \text{c) } \frac{9^{n+1}}{3^{2n+1}} &= \frac{(3^2)^{n+1}}{3^{2n+1}} = \frac{3^{2 \times (n+1)}}{3^{2n+1}} = \frac{3^{2n+2}}{3^{2n+1}} = \boxed{3}
 \end{aligned}$$

81

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \frac{(-ab^2)^3 - (-ab)^2}{-a^{-1}b^3} &= \frac{-a^3b^6 - a^2b^2}{-a^{-1}b^3} \\
 &= \frac{-a^3b^6}{-a^{-1}b^3} + \frac{-a^2b^2}{-a^{-1}b^3} = \boxed{a^4b^3 + a^3b^{-1}} \\
 \text{b) } \frac{(10^8+10^{-7})^2 - (10^8-10^{-7})^2}{10^{-2}} &= \frac{(10^8+10^{-7}-10^8+10^{-7})(10^8+10^{-7}+10^8-10^{-7})}{10^{-2}} \\
 &\text{■ Au lieu de factoriser, on pouvait développer.} \\
 &= \frac{(2 \times 10^{-7})(2 \times 10^8)}{10^{-2}} = \frac{2 \times 10^{-7} \times 2 \times 10^8}{10^{-2}} \\
 &= \frac{4 \times 10^1}{10^{-2}} = 4 \times 10^3 = \boxed{4000} \\
 &\text{■ Et pourtant, la calculatrice affiche 0. Car elle calcule} \\
 &\text{■ avec des valeurs approchées et que l'expression est} \\
 &\text{■ fabriquée pour rendre significatives les erreurs} \\
 &\text{■ d'approximation.}
 \end{aligned}$$

82

$$\begin{aligned}
 \text{a) On trouve 192 dans les trois cas.} \\
 \text{b) } \frac{(8^{n+1}+8^n)^2}{(4^n-4^{n-1})^3} &= \frac{[8^n(8+1)]^2}{[4^{n-1}(4-1)]^3} = \frac{(9 \times 8^n)^2}{(3 \times 4^{n-1})^3} \\
 &= \frac{81 \times 8^{2n}}{27 \times 4^{3n-3}} = \frac{3 \times 8^{2n}}{1 \times 4^{3n} \times 4^{-3}} = \frac{3}{4^{-3}} \times \frac{8^{2n}}{4^{3n}} \\
 &= 3 \times 4^3 \times \frac{(8^2)^n}{(4^3)^n} = 3 \times 4^3 \times \frac{(64)^n}{(64)^n} = 3 \times 4^3 = \boxed{192}
 \end{aligned}$$

83

- a) Soient P et P' deux nombres pairs. Il existe alors un entier n dont P soit le double et un entier n' dont P' soit le double : $P = 2n$ et $P' = 2n'$.

$P \times P' = 2n \times 2n' = 2(2nn')$. Le produit PP' s'exprime donc comme étant le double d'un entier. C'est donc un nombre pair.

Soient I et I' deux entiers impairs. Il existe deux entiers n et n' tels que : $I = 2n+1$ et $I' = 2n'+1$.

$$\begin{aligned} I \times I' &= (2n+1)(2n'+1) = 4nn' + 2n + 2n' + 1 \\ &= 2(2nn' + n + n') + 1. \end{aligned}$$

En posant $k = 2nn' + n + n'$; on a : $II' = 2k+1$, où k est un entier. Donc le produit II' est impair.

- b) 2017 étant impair, $(-1)^{2017}$ vaut -1 .

$$2018 \text{ étant pair, } \left[(-1)^{2017} \right]^{2018} = \boxed{1}$$

- c) Le produit de deux entiers impairs étant impair, on en déduit qu'un « poly-produit » d'entiers impairs est impair. Donc un entier impair, élevé à n'importe quel exposant entier naturel est impair. Donc 2017^{2018} est impair. Donc $(-1)^{(2017^{2018})} = \boxed{-1}$

VALEUR ABSOLUE

84

- a) $|-3| = \boxed{3}$
 b) $|+3| = \boxed{3}$
 c) $|2-5| = \boxed{3}$
 d) $||-2|-|-3|| = |2-3| = |-1| = \boxed{1}$
 e) $-|3-5| = -|-2| = -(2) = \boxed{-2}$